Test Telematico di Matematica (A)

Scienze Agrarie 7/09/2021

1) Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2}\ .$$

2) Data la funzione
$$f(x) \ = \ \log\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\ ,$$
calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 3$.

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x) \ = \ \frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{\log(x^2)}$$
e calcolarne la funzione derivata prima.

4) Calcolare l'integrale indefinito
$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}\, dx\ .$$

Soluzione

1) Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Si applica due volte il Teorema de l'Hopital e si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{2x\cos(x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} -\frac{\cos(x)}{2\cos(x) - 2x\sin(x)} = -\frac{1}{2}\,.$$

2) Si ha

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2-4}$$

per cui $f(3) = \log(5)$ e $f'(3) = -\frac{4}{5}$.
L'equazione della retta cercata risulta

$$y = -\frac{4}{5}(x-3) + \log(5)\,.$$

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali risulta $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$. Si ha quindi

$$D =]-\infty, -1[\,\cup\,]-1, 0[\,\cup\,]0, 1[\,\cup\,]1, +\infty[\,.$$

Si ha

$$f'(x) = -\frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{\log^2(x^2)}\left(\frac{\log(x^2)}{(x-1)^2} + \frac{2}{x}\right)\,.$$

4) Operando il cambiamento di variabile $t = \sin(x)$ ($dt = cos(x)dx$) si ha

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}\,dx = \int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2\sin^2(x)} + C.$$